Circuito RC/Integratore - Il circuito *RC* è costituito da una resistenza *R* in serie ad un condensatore *C*: fig.2.1.19)a.

Alimentato da un generatore che abbia una *d.d.p.* costante, il circuito non presenta alcuna particolarità poiché il condensatore non permette il passaggio della corrente elettrica fra le armature che lo costituiscono di conseguenza la corrente che scorre in *R* è zero.

Se invece la *d.d.p.* del generatore è variabile nel tempo, la tensione $V_A - V_B$ ai capi del condensatore che chiameremo v_C presenta delle caratteristiche particolari.

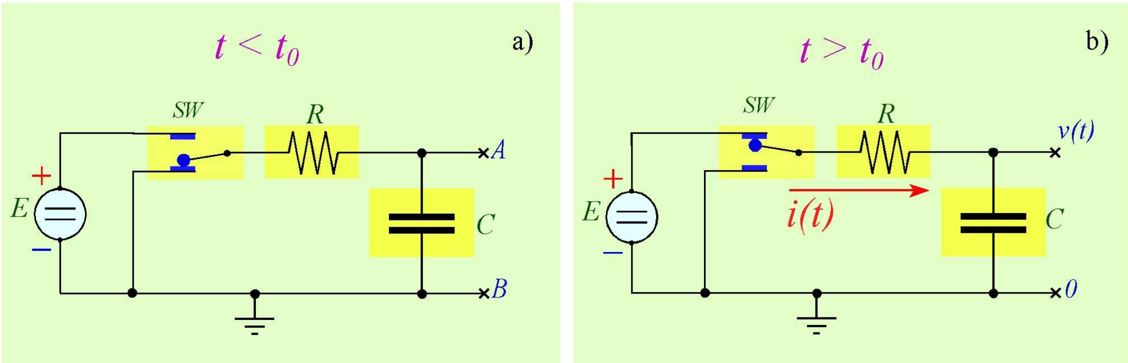

Fig.2.1.19) *a) - Circuito **RC** connesso a zero nel tempo $t < t_0$. La corrente nella resistenza **R** è zero, la d.d.p. fra i punti **A** e **B** è zero.*
*b)- Al tempo $t \geq t_0$ la tensione del generatore **E** viene applicata al circuito, la corrente **i(t)** inizia a scorrere nella resistenza **R** e la $v_C(t)$ fra A e B inizia a salire.*

Regime di carica - Supponiamo di alimentare un circuito *RC* con una *f.e.m.* a gradino. Una *f.e.m.* a gradino si può ottenere con un doppio interruttore (deviatore), che nelle sue due posizioni stabili fornisce al circuito o la tensione zero o la tensione del generatore *E*: fig.2.1.19)a.

Con tensione applicata zero, c'è assenza di corrente, ai capi della resistenza *R* la *d.d.p.* è zero per la *1°* legge di Ohm ed anche la tensione v_C ai capi delle armature del condensatore *C* è zero.

Applicata al circuito la tensione *E* al tempo t_0 e successivi, una corrente *i(t)* inizia a scorrere nella resistenza caricando il condensatore e per la *2°* legge di Kirchhoff riferita alla maglia che costituisce il circuito, si ha:

$$v_C(t) = 0 \qquad per \quad t < t_0 \qquad 2.1.55)a$$

$$v_C(t) = E - R \cdot i(t) \qquad per \quad t > t_0 \qquad 2.1.55)b$$

Sostituendo nella 2.1.55)b le definizioni di corrente *i* e di capacità *C* ed omettendo per semplicità il rapporto funzionale della tensione v_C la stessa equazione diventa:

$$v_C = E - R \cdot \frac{dq}{dt} \quad => \quad v_C = E - R \cdot \frac{C \cdot dv}{dt} \qquad 2.1.56)$$

L'equazione 2.1.56) è una equazione differenziale del *1°* ordine a *variabili separabili*:

$$E - v_C = RC \cdot \frac{dv}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dv}{E - v_C} = \frac{dt}{RC} \qquad 2.1.57)$$

nella quale il prodotto *RC* al denominatore della 2.1.58) deve avere le dimensioni di un tempo per l'omogeneità dell'equazione.

Infatti la relazione dimensionale del prodotto *RC* è:

$$[R]\cdot[C] = [V]\cdot[i]^{-1}\cdot[q]\cdot[V]^{-1} = [V]\cdot[q]^{-1}\cdot[t]\cdot[q]\cdot[V]^{-1} = [t] \qquad 2.1.58)$$

La 2.1.57) si integra facilmente e restituisce il valore della *d.d.p.* ai capi del condensatore *C* in funzione del tempo:

$$\int_0^{v_C(t)} \frac{dv}{(E - v_C)} = \int_0^t \frac{dt}{RC} \qquad \Rightarrow \qquad \left[-ln(E - v_C)\right]_0^{v(t)} = \frac{t}{RC}$$

$$ln\left(\frac{E - v_C(t)}{E}\right) = -\frac{t}{RC} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{E - v_C(t)}{E} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$E - v_C(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \qquad \Rightarrow \qquad v_C(t) = E \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \qquad 2.1.59)$$

La funzione 2.1.59) è l'andamento della tensione $v_C(t)$ ai capi del condensatore al tempo *t* , calcolato a partire dall'istante iniziale $t_0 = 0$ in cui il deviatore *SW* connette il circuito al generatore *E* ed è nota come ***legge di carica*** del condensatore.

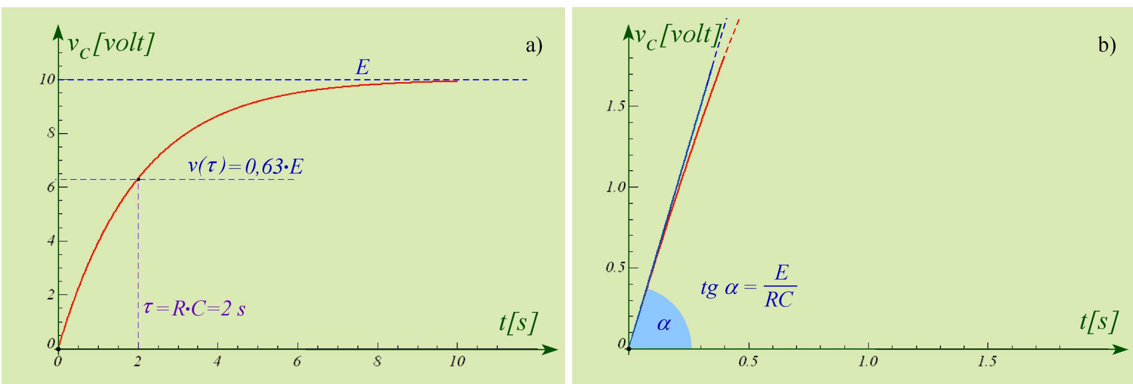

Fig.2.1.20) *a) - La tensione ai capi di un condensatore* $C = 2 \cdot 10^{-6}\ F$ *posto in serie ad una resistenza* $R = 10^{6}\ \Omega$ *durante la carica. E' indicato il tempo di salita* τ.
b) - La tensione ai capi del condensatore nello stesso circuito RC negli istanti iniziali della carica (in rosso). In viola è indicato un incremento perfettamente lineare.

Il suo grafico temporale è riportato in fig.2.1.20)a in cui sono stati usati per le grandezze C ed R i valori : $C=2 \cdot 10^{-6}\,F$ ed $R=10^{6}\,\Omega$.

Particolarmente importante è il valore assunto dalla funzione $v_C(t)$ nel momento in cui $t = RC$, quando cioè l'espressione 2.1.59) si riduce alla:

$$v_C(\tau) = E \cdot \left(1 - e^{-1}\right) = E \cdot \left(1 - \frac{1}{e}\right) = 0{,}63 \cdot E \qquad 2.1.60)$$

Il tempo $t = RC$, necessario alla tensione del condensatore per raggiungere il *63%* del suo valore massimo E. si chiama ***tempo di salita*** del circuito e si indica con la lettera greca τ.

Un'altra caratteristica del circuito RC riguarda la tensione $v_C(t)$ nei primi istanti della carica quando essa è molto più piccola della tensione E: $v_C(t) << E$. In questa condizione, l'equazione differenziale 2.1.57) che governa la tensione v_C, diviene:
ovvero l'***incremento*** della tensione $v(t)$ è costante e per questo ha un andamento lineare

$$\frac{dv}{E} = \frac{dt}{RC} \quad (\,quando \quad v << E\,) \qquad \Rightarrow \qquad dv = \frac{E}{RC} \cdot dt \qquad 2.1.61)$$

nel tempo con coefficiente angolare E/RC: fig.2.1.20)b. Considerando il caso più generale in cui la tensione E del generatore sia variabile nel tempo $E=E(t)$, l'integrazione della 2.1.61) porta alla:

$$\int_0^{v(t)} dv = \frac{1}{RC} \cdot \int_0^{t} E(t)\,dt \quad \Rightarrow \qquad v_C(t) = \frac{1}{RC} \cdot \int_0^{t} E(t)\,dt \qquad 2.1.62)$$

cioè la tensione ai capi del condensatore è proporzionale attraverso la costante $1/RC$ all'integrale della tensione del generatore $E(t)$.

Per tale motivo, quando è utilizzato in queste condizioni, il circuito RC è chiamato ***circuito integratore***.

Regime di scarica **-** Se il condensatore già carico alla tensione E al tempo $t < t_0$ perché connesso al generatore come in fig.2.1.21)a, viene al tempo $t \geq t_0$ messo in *c.c.* attraverso la resistenza R, esso si comporta come un generatore e si scarica nella resistenza R provocando una corrente di segno contrario alla corrente di carica: fig.2.1.21)b. L'andamento della tensione $v_C(t)$ durante la scarica è ricavabile dall'equazione generale 2.1.57), tenendo conto delle diverse condizioni iniziali del circuito.

Avendo escluso il generatore E , si dovrà porre $E=0$ nella 2.1.57) che quindi si trasforma nella:

$$\frac{dv}{-v_C} = \frac{dt}{RC} \qquad 2.1.63)$$

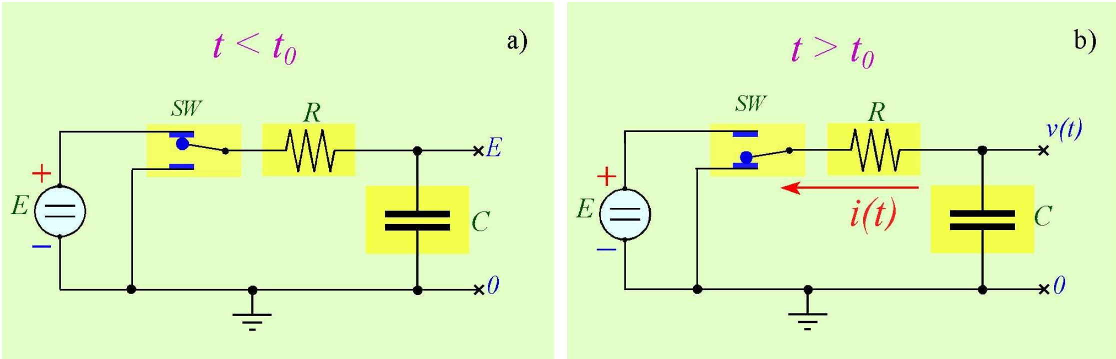

Fig.2.1.21) *a) - Circuito* ***RC*** *al tempo* $t < t_0$ *con il condensatore carico alla tensione* ***E*** *.*
b) - Circuito ***RC*** *al tempo* $t \geq t_0$ *la resistenza* ***R*** *viene connessa in parallelo al condensatore ed una corrente* ***i(t)*** *scorre in essa scaricando il condensatore.*

Nella successiva integrazione si deve inoltre tenere presente che poiché il condensatore all'istante t_0 presenta ai suoi capi la tensione E, si deve porre la condizione iniziale $v_C(t_0) = E$:

$$\int_E^{v_C(t)} \frac{dv}{(-v_C)} = \int_0^t \frac{dt}{RC} \quad => \quad [ln(v_C)]_E^{v_C(t)} = \frac{t}{RC} \quad => \quad ln\, v_C(t) - ln\, E = -\frac{t}{RC}$$

$$ln \frac{v_C(t)}{E} = -\frac{t}{RC} \quad => \quad v_C(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \qquad 2.1.64)$$

La 2.1.64) è la ***legge di scarica*** del condensatore. Il suo grafico temporale è riportato in fig.2.1.22)a calcolato utilizzando i valori : $C=2 \cdot 10^{-6}\ F$ ed $R=10^{6}\ \Omega$ per il condensatore e la resistenza rispettivamente.

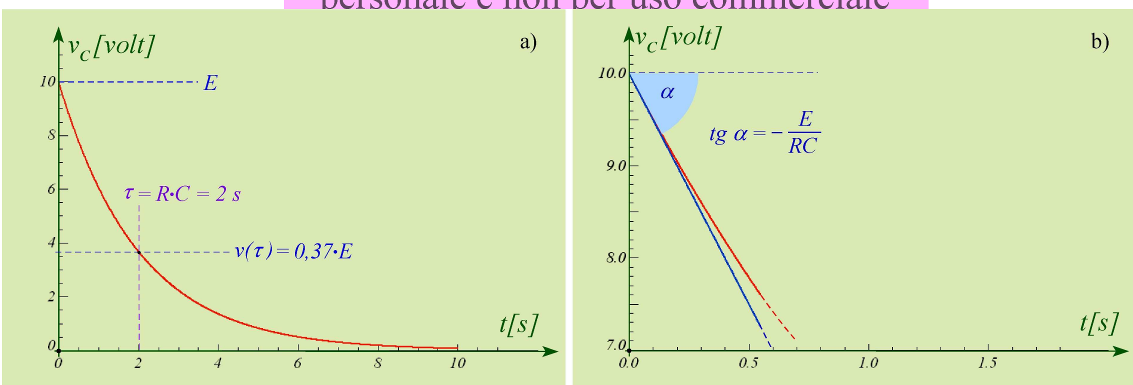

Fig.2.1.22) *a) - La tensione ai capi di un condensatore* $C = 2 \cdot 10^{-6}\ F$ *posto in serie ad una resistenza* $R = 10^{6}\ \Omega$ *durante la scarica. E' indicato il tempo di discesa* τ*.*
b) - La tensione ai capi del condensatore nello stesso circuito RC negli istanti iniziali della scarica (in rosso). In viola è indicato un decremento perfettamente lineare.

Anche per la scarica del condensatore un valore particolare della $v_C(t)$ è rappresentato dal valore assunto dalla funzione nel momento in cui $t = \tau = RC$ noto come ***tempo di discesa*** del circuito:

$$v_C(t) = E \cdot e^{-\frac{\tau}{RC}} = E \cdot e^{-1} = \frac{E}{e} = 0{,}37 \cdot E \qquad 2.1.65)$$

Come per il regime di carica, nei primi istanti della scarica, la tensione $v(t)$ ai capi del condensatore si può approssimare alla tensione E $[\ v_C(t) \approx E\ ]$, condizione che permette di scrivere l'equazione differenziale 2.1.63) che governa la tensione $v_C(t)$ nella forma:

$$\frac{dv}{-E} = \frac{dt}{RC} \quad (\,quando \quad v_C \approx E\,) \qquad => \qquad dv = -\frac{E}{RC} \cdot dt \qquad 2.1.66)$$

ovvero il ***decremento*** della tensione v è costante e la v stessa ha un andamento lineare nel tempo con coefficiente angolare $-E/RC$: fig.2.1.22)b.

Considerando il caso più generale in cui la tensione E del generatore sia variabile nel tempo $E=E(t)$, l'integrazione della 2.1.66) porta alla:
cioè la tensione ai capi del condensatore è proporzionale attraverso la costante $-1/RC$

$$\int_E^{v(t)} dv = -\frac{1}{RC} \cdot \int_0^t E(t)dt \qquad => \qquad v_C(t) - E = -\frac{1}{RC} \cdot \int_0^t E(t)dt$$

$$v_C(t) = E - \frac{1}{RC} \cdot \int_0^t E(t)dt \qquad 2.1.67)$$

all'integrale della tensione del generatore $E(t)$ cambiato di segno, cui va sommata la tensione E come condizione iniziale al tempo $t_0=0$.

Anche durante la scarica quindi, nelle opportune condizioni, il circuito RC si comporta come un ***circuito integratore***.